

вещающий модели в виде некоторого линейного фильтра. Частотная характеристика канала связи $H(f)$ ограничена величиной W и дисперсионная — в том смысле, что скорость распространения сигнала зависит от частоты.

Отметим также, что при проведении теоретических исследований более удобна симметричная модель канала связи. Частотная характеристика для нее определена в диапазоне $[-W, W]$ и симметрична относительно нуля оси частот.

Модулированная последовательность импульсов характеризуется периодом следования T и длительностью Δt импульсного сигнала, а также амплитудой.

Оценка эффективности метода проводится на примере сигнала с амплитудно-импульсной модуляцией, когда величины Δt и период T следования импульсов являются постоянными. Носителем информации является амплитуда импульса x_k .

Основные теоретические результаты

При периодическом оценивании последовательности сигналов k -импульс на входе приемника описывается выражением

$$y_k(t) = x_k s_{yk} d_k(t), \quad (1)$$

где $s_{yk}(t)$ — его огибающая, описываемая соотношением

$$s_{yk}(t) = \text{rect}\left(\frac{t - kT}{\Delta t}\right) h'_k(t). \quad (2)$$

Через $d_k(t)$ обозначено окно данных k -импульса амплитудой x_k , $h'_k(t)$ — импульсная характеристика канала связи.

Метод периодического оценивания обеспечивает выделение из последовательности каждого поступающего на вход приемника импульса посредством умножения ее на некоторое временное окно данных. С учетом определения $s_{yk}(t)$ в соответствии с выражением (2), соотношение (1) запишем в следующем виде:

$$y_k(t) = \left[x_k \text{rect}\left(\frac{t}{\Delta t}\right) h'(t) + \eta_0 \right] d_k(t). \quad (3)$$

В (3) величина η_0 определена условием

$$|\eta(t)| \leq \eta_0 \ll x_k$$

и характеризует верхнюю границу ошибки фильтрации при обработке входной информационной последовательности. Индекс k для окна данных является носителем аддитивно-временной структуры исходной информационной последовательности.

Метод периодического оценивания предполагает использование достаточно коротких временных апертур окон данных, т. к. их длительность ограничена периодом следования импульсов в последовательности. Указанное свойство окон приводит к увеличению дисперсии оценок спектра. В какой-то мере эту составляющую погрешности можно снизить соответствующим выбором класса временных окон и их параметров.

Процедуру обработки сигнала на основе концентрирующих интегральных преобразований рассмотрим для временного окна прямоугольного типа, которое имеет в частотной области самый узкий главный лепесток спектральной характеристики и множество убывающих со скоростью $O(1/\omega)$ боковых, что вызывает эффект «просачивания».

Рассмотрим выражение (3) более подробно. Легко заметить, что оно состоит из двух групп компонент, взаимодействующих между собой аддитивно. К первой относятся описание импульсного сигнала, передаваемого в канал связи, импульсная характеристика канала связи и окно данных. Эти компоненты взаимодействуют через операцию свертки и умножения. Вторая группа характеризует верхнюю границу ошибки линейной фильтрации при выделении огибающей информационного сигнала. Кроме того, окно данных воздействует на обе группы через операцию умножения.

Применим процедуру интегральных концентрирующих преобразований к выражению (3). Осуществим на первом шаге обратное преобразование Фурье и получим

$$F^{-1}[y_k(t)](v) = F^{-1}\left\{ \left[x_k \text{rect}\left(\frac{t}{\Delta t}\right) h'(t) + \eta_0 \right] \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \right\}(v) \quad (4)$$

или, в развернутом виде,

$$F^{-1}[y_k(t)](v) = \frac{x_k}{2\pi} F^{-1}\left[\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \right](v) \times \\ \times \left\{ F^{-1}\left[\text{rect}\left(\frac{t}{\Delta t}\right) \right](v) F^{-1}[h'(t)](v) + \frac{1}{2\pi} \left[F^{-1}[\eta_0 \left[\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \right]] \right](v) \right\}.$$

Последнее соотношение, после нахождения обратного преобразования Фурье, представляется следующим образом:

$$F^{-1}[y_k(t)](v) = \frac{x_k T \Delta t}{2\pi} \left\{ \frac{\sin \frac{T}{2} v}{\frac{T}{2} v} \left[\frac{\sin \frac{\Delta t}{2} v}{\frac{\Delta t}{2} v} H(v) \right] \right\} + \\ + \frac{T}{2\pi} \left[\eta_0 \frac{\sin \frac{T}{2} v}{\frac{T}{2} v} \right], \quad (5)$$

где $H(v)$ — обратное преобразование Фурье от импульсной функции $h'(t)$, являющейся по своей сути частотной характеристикой канала связи.

Перепишем выражение (5) в виде

$$Y_k(v) = Y_h(v) + Y_\eta(v), \quad (6)$$

где

$$Y_k(v) = F^{-1}[y_k(t)](v); \quad (7)$$

$$Y_h(v) = \frac{x_k T \Delta t}{2\pi} \left\{ \frac{\sin \frac{T}{2} v}{\frac{T}{2} v} \left[\frac{\sin \frac{\Delta t}{2} v}{\frac{\Delta t}{2} v} H(v) \right] \right\}; \quad (8)$$

$$Y_\eta(v) = \frac{T}{2\pi} \left[\eta_0 \frac{\sin \frac{T}{2} v}{\frac{T}{2} v} \right]. \quad (9)$$

Соотношения (6)–(9) применимы к моделям каналов связи самого общего вида и являются основой дальнейших рассуждений.

Концентрирующие интегральные преобразования для идеализированной модели канала связи

Конкретизируем полученные выше результаты. Пусть моделью канала связи является фильтр ниж-

них частот с амплитудно-частотной характеристикой вида $H(\omega) = \text{rect}(\omega/2W)$, полосой пропускания $[-W, W]$ и импульсной характеристикой

$$h'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{W}{\pi} \frac{\sin Wt}{Wt}.$$

С учетом этого соотношение (8) примет вид

$$Y_h(v) = \frac{x_k T \Delta t}{2\pi} \left\{ \frac{\sin \frac{T}{2} v}{\frac{T}{2} v} \left[\frac{\sin \frac{\Delta t}{2} v}{\frac{\Delta t}{2} v} \text{rect} \left(\frac{v}{2W} \right) \right] \right\}. \quad (10)$$

Выражение (10) описывает амплитудно-временные параметры информационного сигнала, в то время как (9) характеризует погрешность, вносимую операцией линейной фильтрации.

Рассмотрим выражение (9). Из определения свертки следует, что

$$\eta_0 * \frac{\sin \frac{T}{2} v}{\frac{T}{2} v} = \eta_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{T}{2} \xi}{\frac{T}{2} \xi} d\xi = \pi \eta_0.$$

Таким образом, составляющая $Y_\eta(v)$ равна

$$Y_\eta(v) = T \eta_0 / 2. \quad (11)$$

Далее. Выражение (10) представим в следующем виде:

$$Y_h(v) = \frac{x_k T \Delta t}{2\pi} \left[\int_{-W}^W \frac{\sin \frac{\Delta t}{2} \xi}{\frac{\Delta t}{2} \xi} \frac{\sin \frac{T}{2} (v-\xi)}{\frac{T}{2} (v-\xi)} d\xi \right]. \quad (12)$$

Интеграл в квадратных скобках является сверткой с конечными пределами интегрирования. Временные параметры последовательности и окна данных, а также частотный диапазон полосы пропускания канала связи известны. Это позволяет предварительно найти их свертку, т. е. получить некоторую функцию, зависящую от v .

На следующем шаге произведем перенормировку, т. е. разделим правые и левые части соотношений (11) и (12) на нормирующий множитель (исключая точки неопределенности), который может быть вычислен заранее. Множитель имеет вид

$$I(v) = \int_{-W}^W \frac{\sin \frac{\Delta t}{2} \xi}{\frac{\Delta t}{2} \xi} \frac{\sin \frac{T}{2} (v-\xi)}{\frac{T}{2} (v-\xi)} d\xi. \quad (13)$$

Использование множителя вида (13) позволяет переписать выражения (11) и (12):

$$Y'_h(v) = \frac{x_k T \Delta t}{2\pi}; \quad (14)$$

$$Y'_\eta(v) = \frac{\eta_0 T}{2} I^{-1}(v), \quad (15)$$

где

$$Y'_h(v) = Y_h(v) I^{-1}(v), \quad Y'_\eta(v) = Y_\eta(v) I^{-1}(v).$$

Поэтому можно записать:

$$Y'_k(v) = Y'_h(v) + Y'_\eta(v) = T \left(\frac{x_k \Delta t}{2\pi} + \frac{\eta_0}{2} I^{-1}(v) \right). \quad (16)$$

Соотношение (16) содержит интеграл вида (13). Оценим его, для чего рассмотрим выражение (4).

Учитывая известность импульсной характеристики канала связи, запишем:

$$y_k(t) = x_k \left[\frac{x_k W}{\pi} \text{rect} \left(\frac{t}{\Delta t} \right) \frac{\sin Wt}{Wt} + \eta_0 \right] \text{rect} \left(\frac{t}{T} \right)$$

или, в развернутом виде,

$$y_k(t) = x_k \left[\frac{x_k W}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect} \left(\frac{\xi}{\Delta t} \right) \frac{\sin W(t-\xi)}{W(t-\xi)} d\xi + \eta_0 \right] \text{rect} \left(\frac{t}{T} \right).$$

Ограниченность длительности функции $\text{rect}(\xi/\Delta t)$ величиной Δt позволяет последнее соотношение представить так:

$$y_k(t) = \left[\frac{x_k W}{\pi} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \frac{\sin W(t-\xi)}{W(t-\xi)} d\xi + \eta_0 \right] \text{rect} \left(\frac{t}{T} \right).$$

Произведя замену $W(t-\xi)$ на переменную z , получим

$$y_k(t) = \left\{ \frac{x_k}{\pi} \left[\text{Si} \left(W \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \right) - \text{Si} \left(W \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) \right) \right] + \eta_0 \right\} \text{rect} \left(\frac{t}{T} \right). \quad (17)$$

Воспользуемся полученным результатом следующим образом. Найдем обратное преобразование Фурье от выражения (17), учитывая ограниченность во времени функции $\text{rect}(t/T)$. Запишем:

$$F^{-1}[y_k(t)](v) = \frac{x_k}{2\pi^2} \left\{ F^{-1} \left[\text{Si} \left(W \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \right) \right] \right\}_{-T/2}^{T/2} (v) - F^{-1} \left[\text{Si} \left(W \left(t - \frac{\Delta t}{2} \right) \right) \right]_{-T/2}^{T/2} (v) + \frac{\eta_0}{2\pi} F^{-1} \left[\text{rect} \left(\frac{t}{T} \right) \right] (v). \quad (18)$$

Во-первых, функции интегрального синуса в выражении (18) имеют временной сдвиг, что при обратном преобразовании Фурье эквивалентно умножению на множитель $\exp(\pm jW\Delta t/2)$. Знак показателя экспоненты определяется направлением временного сдвига. Таким образом, соотношение (18) представим так:

$$F^{-1}[y_k(t)](v) = \frac{x_k}{2\pi^2} \left\{ F^{-1} [\text{Si}(Wt)] \right\}_{-T/2}^{T/2} (v) \left(e^{-j\frac{W\Delta t}{2}} - e^{j\frac{W\Delta t}{2}} \right) + \frac{T\eta_0}{2}.$$

Во-вторых, учтем, что функция $\text{Si}(\cdot)$ нечетна и потому для нее верно

$$F^{-1} \left[\right]_{-T/2}^{T/2} (v) = 2j F_{\sin}^{-1} \left[\right]_0^{T/2} (v),$$

где через $F_{\sin}^{-1}[\cdot]$ обозначено обратное синус-преобразование Фурье.

Следует отметить, что при $v < 0$ функция преобразована может быть продолжена на интервал $(-\infty, 0)$ как четным, так и нечетным образом. Поэтому считая переменную v , так же как и переменную t , положительной, можно пользоваться как косинус-, так и синус-преобразованием Фурье. Однако результаты этих преобразований в общем случае могут быть различными. Поэтому более обоснованным и логичным представляется такое продолжение в область отрицательного аргумента, когда функция сохраняет свойства непрерывности и нечетности. Кроме того, если исхо-

дить из свойства симметрии преобразования Фурье, то результат преобразования должен оставаться нечетной функцией.

Воспользуемся таблицами преобразования [6] для выражения в фигурных скобках и найдем, что

$$F^{-1}[y_k(t)](v) = \frac{x_k}{2\pi^2} \left\{ \frac{j}{v} \left[\text{Si}\left(\frac{T}{2}(v+W)\right) - \text{Si}\left(\frac{T}{2}(v-W)\right) \right] - 2\text{Si}\left(\frac{WT}{2}\right) \cos\left(\frac{T}{2}v\right) \right\} \left[e^{-j\frac{W\Delta t}{2}v} - e^{j\frac{W\Delta t}{2}v} \right] + \frac{T\eta_0}{2}$$

или в виде

$$F^{-1}[y_k(t)](v) = \frac{x_k}{2\pi^2} \left\{ \left[\text{Si}\left(\frac{T}{2}(v+W)\right) - \text{Si}\left(\frac{T}{2}(v-W)\right) \right] - 2\text{Si}\left(\frac{WT}{2}\right) \cos\left(\frac{T}{2}v\right) \right\} \frac{\sin(W\Delta t v/2)}{W\Delta t v/2} + \frac{T\eta_0}{2}.$$

Последнее соотношение может быть представлено так:

$$F^{-1}[y_k(t)](v) = \frac{x_k T \Delta t}{2\pi} I(v) + \frac{T\eta_0}{2}. \quad (19)$$

Выражения (6) и (19) по своей сути эквивалентны. С учетом обозначений в виде формул (7)–(9) и (13) запишем:

$$I(v) = \int_{-W}^W \frac{\sin \frac{\Delta t}{2} \xi}{\frac{\Delta t}{2} \xi} \frac{\sin \left[\frac{T}{2}(v-\xi) \right]}{\frac{T}{2}(v-\xi)} d\xi = \frac{1}{\pi T \Delta t} \left\{ \left[\text{Si}\left(\frac{T}{2}(v+W)\right) - \text{Si}\left(\frac{T}{2}(v-W)\right) \right] - 2\text{Si}\left(\frac{WT}{2}\right) \cos\left(\frac{T}{2}v\right) \right\} \frac{\sin(W\Delta t v/2)}{W\Delta t v/2}. \quad (20)$$

Левая часть соотношения (20) является по своей сути сверткой обратного преобразования Фурье импульсного сигнала единичной амплитуды и длительностью Δt и временного окна данных с апертурой, равной T . Пределы вычисления свертки конечны и определяются интервалом $[-W, W]$.

Рассмотрим поведение функции, отвечающей правой части выражения (20).

Во-первых, множитель $\sin(W\Delta t v/2)/(W\Delta t v/2)$ непрерывен на всей оси, имеет максимум, равный 1 при $v=0$, и осциллирует вдоль оси v с периодом $2\pi/W\Delta t$ и амплитудой, убывающей как $O(1/v)$.

Во-вторых, при $v=0$ функция тождественно равна нулю. Таким образом, на основании результата (19) можно заключить, что для одиночного импульса как предельного случая импульсной последовательности уровень межсимвольных искажений равен нулю в точке $v=0$. Погрешность, содержащаяся в переданной амплитуде импульса, определяется только характеристиками выделяющего этот импульс линейного фильтра. Исходя из того факта, что длительность передаваемого импульса $\Delta t \ll T$, будем считать уровень межсимвольных искажений в пределах вершины импульса длительностью Δt постоянной величиной, которая в данном случае равна нулю.

В-третьих, т. к. рассматривается модель согласованного канала связи [1, с. 163], для которого выполняется неравенство $W \geq 1/2T$, то очевидно, что $WT/2 \geq 1/4$.

Следует отметить, что для значений $WT/2 \leq 10$ разность сдвинутых на $\pm W$ интегральных синусов ведет себя как функция типа $\sin x/x$, имеющая максимум, равный $2\text{Si}(TW/2)$ при $v=0$. Поэтому функция в квадратных скобках имеет при $v=0$ минимум, равный нулю. Таким образом, функция вида (20) непрерывна и регулярна на всей оси v .

Получение аналитической зависимости для $I(v)$, как в рассматриваемом случае, в виде соотношения (20) — это скорее исключение из общего правила. Достичь этого результата позволило использование простейшей модели канала связи. В случае же применения более содержательных моделей канала связи и окон данных не прямоугольного типа функция $I(v)$ не будет выражаться в квадратурах. Необходимая информация об особенностях поведения и влияния функции $I(v)$ для проведения анализа или использования в приложениях может быть получена только на основе численных методов. Это, естественно, приведет к появлению некоторой методической погрешности $\epsilon(v)$:

$$|\epsilon(v)| < \epsilon_0 \ll I(v), \quad (21)$$

где ϵ_0 — верхняя граница этой методической ошибки.

С другой стороны, даже знание функциональной зависимости для $I(v)$ не гарантирует объективного отражения ею свойств нормирующего множителя. Это связано с тем, что размер апертюры окна данных T , его форма, параметры носителя информации (импульсного сигнала) реально содержат в себе ошибки их практической реализации, следствия влияния технологического разброса и дестабилизирующих факторов. Поэтому реальную зависимость $I_{\text{реал}}(v)$, учитывая эти факторы, определим как

$$I_{\text{реал}}(v) = I(v) + \epsilon(v),$$

или, с учетом неравенства (21),

$$I_{\text{реал}}(v) < I(v) + \epsilon_0. \quad (22)$$

Следующим этапом реализации описываемого метода концентрирующих интегральных преобразований является операция нормировки. Осуществим ее с учетом принятого обозначения в виде (20). Для этого разделим правую и левую части соотношения (19) на правую часть (22). Заметим, что в идеальном случае, когда $\epsilon(v)=0$, точки нулевого альтернанса функции $I(v)$ при перенормировке создают неопределенности, которые можно исключить, удалив эти точки. В результате получим:

$$\frac{F^{-1}[y_k(t)](v)}{I(v) + \epsilon_0} = \frac{T}{2\pi} \frac{x_k \Delta t I(v) + \pi \eta_0}{I(v) + \epsilon_0}. \quad (23)$$

Введем обозначение

$$\frac{F^{-1}[y_k(t)](v)}{I(v) + \epsilon_0} = \tilde{Y}(v).$$

После некоторых преобразований выражение (23) представим в виде

$$\tilde{Y}(v) = \frac{T x_k \Delta t}{2\pi} \left[1 + \frac{\pi \eta_0 - \epsilon_0}{x_k \Delta t I(v) + \epsilon_0} \right]$$

или

$$\tilde{Y}(v) = \frac{T x_k \Delta t}{2\pi} [1 + E(v)], \quad (24)$$

где член

$$E(v) = \frac{\frac{\pi \eta_0}{x_k \Delta t} - \varepsilon_0}{I(v) + \varepsilon_0} \quad (25)$$

характеризует суммарную ошибку, определяемую свойствами линейного аддитивного фильтра, метода формирования операндов интегрального множителя $I(v)$ и метода его вычисления.

Очевидно, что в случае, если функция $I(v)$ будет гладкой и у нее будут отсутствовать точки нулевого альтернанса на оси v , то и функция погрешности $E(v)$ будет также гладкой. В значительной мере это будет определяться выбором типа окна данных. Так, если его спектр будет иметь монотонный характер с асимптотическим стремлением к нулю, то поведение погрешности $E(v)$ будет описываться гладкой и монотонной функцией. Анализ функции $E(v)$ с учетом свойств интегрального множителя $I(v)$ показывает, что ее приближенный вид со всеми характерными точками поведения может быть проиллюстрирован графиком **рис. 1**.

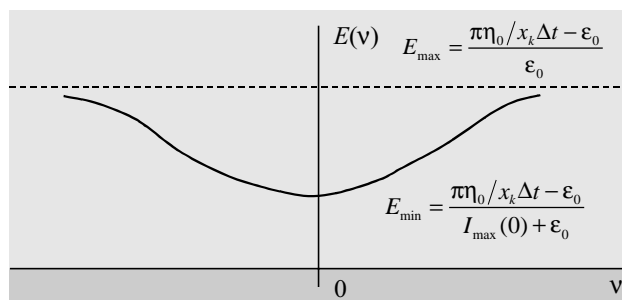


Рис. 1

Следующим шагом в описании реализации метода интегральных концентрирующих преобразований является операция умножения правой и левой частей выражения (24) на $1/v$ и осуществление обратного преобразования Фурье.

Заметим, что деление на величину v образа эквивалентно при обратном преобразовании операции интегрирования.

Итак, результатом проделанных преобразований при описании метода концентрирующих интегральных преобразований является следующее соотношение:

$$F^{-1} \left[\frac{1}{v} \tilde{Y}(v) \right] (t) = \frac{T x_k \Delta t}{2\pi} \left\{ F^{-1} \left[\frac{1}{v} 1 \right] (t) + F^{-1} \left[\frac{1}{v} E(v) \right] (v) \right\}.$$

Обратное преобразование от константы есть δ -функция Дирака, проинтегрированная в интервале $(-\infty, t)$. В результате получим единичную функцию, обладающую следующими свойствами:

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

Проведенные рассуждения и результат получены при преобразовании Фурье первого слагаемого.

Для второго слагаемого трансформанта Фурье представляется в виде $\int_{t_0}^t e(\theta) d\theta$, где $e(t)$ — функция, полученная как результат обратного преобразования Фурье от функции погрешности $E(v)$, т. е.

$$e(t) = F^{-1}[E(v)](t).$$

Окончательный результат преобразований примет следующий вид:

$$F^{-1} \left[\frac{1}{v} \tilde{Y}(v) \right] (t) = \frac{T x_k \Delta t}{(2\pi)^2} \left[1(t) + \int_{-\infty}^t e(\theta) d\theta \right]. \quad (26)$$

Очевидно, что даже в случае использования простейших математических моделей аналитического выражения получить нельзя — из-за невозможности нахождения обратного преобразования Фурье от функции ошибок $E(v)$ вида (25). В сложившейся ситуации полезно получение качественной оценки общего вида — исходя из знания общих свойств функции $E(v)$. Для получения такой оценки проведем ряд тождественных преобразований, целью которых является представление функции $E(v)$ в виде другой функции — $E_{\text{доп}}(v)$, обладающей требуемыми свойствами, а именно:

$$E_{\text{доп}}(v) \rightarrow 0 \text{ при } |v| \rightarrow \infty.$$

Кроме того, функция $E_{\text{доп}}(v)$ должна иметь максимум в точке, где график исходной функции $E(v)$ имеет минимум.

С этой целью осуществим сдвиг функции $E(v)$ по оси ординат на величину E_{min} и затем пронормируем ее. Для этого, во-первых, запишем очевидное тождество

$$E(v) = E_{\text{min}} + \Delta E \left[\frac{E(v) - E_{\text{min}}}{\Delta E} \right], \quad (27)$$

где $\Delta E = E_{\text{max}} - E_{\text{min}}$.

Очевидно, что выражения в квадратных скобках имеет своим верхним пределом значение, равное единице при $E(v) = E_{\text{max}}$, и равно нулю при $E(v) = E_{\text{min}}$.

Во-вторых, для выражения в квадратных скобках построим дополняющую функцию. Очевидно, что верно соотношение

$$\frac{E(v) - E_{\text{min}}}{\Delta E} = - \left(1 - \frac{E(v) - E_{\text{min}}}{\Delta E} - 1 \right),$$

которое может быть представлено в виде следующей функции так:

$$E_{\text{д\acute{e}п}}(v) = E_{\text{min}} \left(1 - \frac{E(v) - E_{\text{min}}}{\Delta E} \right).$$

При $|v| \rightarrow \infty$ $E_{\text{доп}}(v) \rightarrow 0$ и имеет максимальное значение E_{min} . Таким образом, функция $E_{\text{доп}}(v)$ обладает требуемыми свойствами.

С учетом введенной выше функции $E_{\text{доп}}(v)$ соотношение (27) представим следующим образом:

$$E(v) = E_{\text{max}} - \frac{\Delta E}{E_{\text{min}}} E_{\text{д\acute{e}п}}(v). \quad (28)$$

Учтем, что значение E_{min} известно, а величина E_{max} определяется как $\sup E(v)$ при $|v| \rightarrow \infty$. Кроме того, учтем и то, что функция $E_{\text{доп}}(v)$ выражается че-

рез функцию $I(v)$. Введем обозначение $I_{\max} = I_{\max}(0)$. После проведения простейших преобразований соотношение (28) запишем так:

$$E(v) = \frac{1}{\varepsilon_0} [\Delta\varepsilon_0 - I_{\max} E_{\text{доп}}(v)], \quad (29)$$

$$\text{где } \Delta\varepsilon_0 = \frac{\pi\eta_0}{x_k \Delta t} - \varepsilon_0.$$

Воспользуемся полученным выражением (29) для $E(v)$ и найдем обратное преобразование от функции ошибки, т. е.

$$F^{-1} \left[\frac{1}{v} E(v) \right] (t) = \frac{\Delta\varepsilon_0}{\varepsilon_0} F^{-1} \left[\frac{1}{v} 1 \right] (t) - \frac{1}{\varepsilon_0} \left[I_{\max} F^{-1} \left(\frac{1}{v} E_{\text{доп}}(v) \right) (t) \right].$$

С учетом известных свойств обратного преобразования Фурье получим:

$$F^{-1} \left[\frac{1}{v} E(v) \right] (t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left[\Delta\varepsilon_0 1(t) - I_{\max} \int_{-\infty}^t e_{\text{доп}}(\theta) d\theta \right], \quad (30)$$

где $e_{\text{доп}}(t)$ — прообраз функции $E_{\text{доп}}(v)$.

Таким образом, с учетом результата (30) выражение (26) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \hat{y}_k(t) &= F^{-1} \left[\frac{1}{v} \tilde{Y}(v) \right] (t) = \\ &= \frac{T x_k \Delta t}{(2\pi)^2} \left[1(t) \left(1 - \frac{\Delta\varepsilon_0}{\varepsilon_0} \right) + \frac{I_{\max}}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^t e_{\text{доп}}(\theta) d\theta \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Рассмотрим детальнее полученное соотношение (31). Видно, что ошибки фильтрации и методов вычислений приводят к искажению истинного значения амплитуды информационного импульса — как в виде постоянных составляющих $\Delta\varepsilon_0$ и ε_0 , так и в виде интегрального соотношения, обусловленного межсимвольными искажениями. Очевидно и то, что прообраз ошибки $e_{\text{доп}}(t)$ является монотонной функцией ввиду монотонности функции $E(v)$. Отметим также, что при $|v| \rightarrow \infty$ функции $E_{\text{доп}}(v)$ и $I(v)$ имеют порядок убывания не менее $O(1/v)$. Поэтому во временной области скорость убывания $e_{\text{доп}}(t)$ имеет порядок $O(\exp(-t))$, что следует из основных свойств преобразования Фурье.

Введем в рассмотрение коэффициент сжатия R , определяемый как отношение эффективных длительностей импульсов до и после обработки. Так, в результате применения метода концентрирующих интегральных преобразований удалось получить на выходе устройства обработки импульс типа $1(t)$, эффективная длительность которого теоретически равна нулю, т. е. без учета интегральной составляющей ошибки коэффициент сжатия $R \rightarrow \infty$. Реальная эффективная длительность сигнала после обработки методом концентрирующих интегральных преобразований конечна, и потому величина R также конечна.

Интегральная составляющая погрешности, найденная для единичного импульса, позволяет найти общую оценку уровня межсимвольных искажений для всей последовательности. Для этого запишем ее общее выражение —

$$\Delta\varepsilon(t) = \frac{T x_k \Delta t}{(2\pi)^2} \frac{I_{\max}}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^t e_{\text{доп}}(\theta) d\theta \quad (32)$$

и оценим ее величину. Для этого построим модель погрешности в классе функций, удовлетворяющих сформулированным выше основным требованиям. За основу примем наличие у функции $E_{\text{доп}}(v)$ известных асимптотических свойств. Во-первых, $E_{\text{доп}}(v) \geq O(1/v)$. И, во-вторых, функция $E_{\text{доп}}(v)$ должна иметь максимум, равный E_{\min} .

В качестве одной из возможных функций, удовлетворяющей указанным условиям поведения ошибки, может быть использована спектральная функция

$$E_{\text{доп}}(v) = ((1/E_{\min}) + j|v|)^{-1}. \quad (33)$$

Данная функция обладает перечисленными выше свойствами и описывает наихудший — в смысле асимптотического поведения спектральной функции — случай. Поэтому интегральная составляющая ошибки при таком выборе функции модели дает верхнюю границу оценки. Знак модуля учитывает симметричность импульсной последовательности на временной оси, т. к. нами используется представление, при котором сигналы продолжены в область отрицательных значений времени.

Найдем двустороннее обратное преобразование Фурье от функции [3, с. 113], определенной соотношением вида (33). Запишем:

$$e_{\text{доп}}(t) = \frac{1}{2\pi} \exp \left(-\frac{1}{E_{\min}} |t| \right).$$

Отметим, что нормирующий коэффициент обратного преобразования Фурье, равный $1/2\pi$, в выражении (32) уже учтен при его выводе. В последней же формуле он приведен только из соображений корректности математической записи.

Полученное выражение для описания поведения функции погрешности интересно с точки зрения прогноза поведения межсимвольной помехи внутри интервала между двумя соседними импульсами. Интегральную составляющую погрешности представим так:

$$\Delta\varepsilon(t) = \frac{T x_k \Delta t}{4\pi^2} \frac{I_{\max}}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^t \exp \left(-\frac{1}{E_{\min}} |\theta| \right) d\theta.$$

В результате после выполнения операции интегрирования получим:

$$\Delta\varepsilon(t) = \frac{T x_k \Delta t}{4\pi^2} \frac{I_{\max} E_{\min}}{\varepsilon_0} \exp \left(-\frac{|t|}{E_{\min}} \right).$$

Известная величина E_{\min} и ее взаимосвязь с ошибками фильтрации ε_0 и η_0 позволяют представить полученное выражение для интегральной составляющей погрешности в иной форме, т. е. в виде

$$\Delta\varepsilon(t) = \frac{T I_{\max}}{4\pi^2} \frac{(\pi\eta_0 - \varepsilon_0 x_k \Delta t)}{(I_{\max} + \varepsilon_0)} \exp \left(-\frac{(I_{\max} + \varepsilon_0) x_k \Delta t}{\pi\eta_0 - \varepsilon_0 x_k \Delta t} |t| \right). \quad (34)$$

Выражение для интегральной составляющей погрешности может быть использовано для оценки эффективной длительности импульса на выходе уст-

ройства обработки в соответствии с описанным методом.

Найдем оценку эффективной длительности информационного импульса после его обработки методом концентрирующих интегральных преобразований. Воспользуемся для этого следующим подходом.

Аппроксимируем передний и задний его фронты отрезками прямых, исходящих из точки $(0, \Delta\epsilon_0(0))$, с угловым коэффициентом, равным значению производной в той же точке (рис. 2)

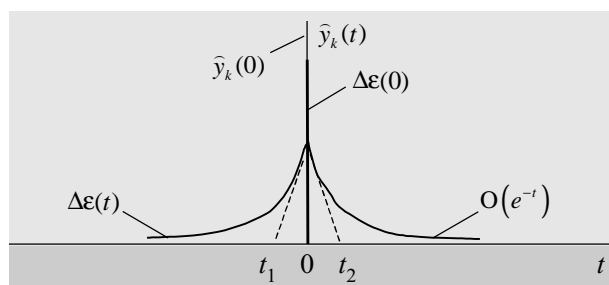


Рис. 2

Величина погрешности в указанной точке равна

$$\Delta\epsilon(0) = \frac{T}{4\pi^2} \frac{I_{\max}(\pi\eta_0 - \epsilon_0 x_k \Delta t)}{I_{\max} + \epsilon_0}.$$

Угловым коэффициентом прямой, проходящей через данную точку при $t > 0$, равен

$$\Delta\epsilon'(t)|_{t=0} = -\frac{T x_k \Delta t I_{\max}}{4\pi^2}$$

и, соответственно, при $t < 0$ он определяется выражением

$$\Delta\epsilon'(t)|_{t=0} = \frac{T x_k \Delta t I_{\max}}{4\pi^2}.$$

Уравнения прямых, проходящих через точку $(0, \Delta\epsilon_0(0))$ с угловыми коэффициентами $\pm\Delta\epsilon'(0)$, имеют вид

$$\hat{y}_k(t) = \pm \frac{T x_k \Delta t I_{\max}}{4\pi^2} t + \frac{T}{4\pi^2} \frac{I_{\max}(\pi\eta_0 - \epsilon_0 x_k \Delta t)}{I_{\max} + \epsilon_0}.$$

Отсюда точки пересечения прямых с осью абсцисс соответственно равны

$$t_1 = -\frac{\pi\eta_0 - \epsilon_0 x_k \Delta t}{(I_{\max} + \epsilon_0) x_k \Delta t} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{\pi\eta_0 - \epsilon_0 x_k \Delta t}{(I_{\max} + \epsilon_0) x_k \Delta t}.$$

Эффективная длительность импульса в информационной последовательности такова:

$$\Delta\tilde{t} = 2 \frac{\pi\eta_0 - \epsilon_0 x_k \Delta t}{(I_{\max} + \epsilon_0) x_k \Delta t}. \quad (35)$$

С учетом принятых ограничений на η_0 и ϵ_0 следует, что $\Delta\tilde{t} \ll \Delta t$.

Коэффициент сжатия R в рассматриваемом случае определяется выражением

$$R = \frac{\Delta t}{\Delta\tilde{t}} = \frac{(I_{\max} + \epsilon_0) x_k \Delta t^2}{2(\pi\eta_0 - \epsilon_0 x_k \Delta t)} \gg 1. \quad (36)$$

Таким образом, на основе мажорантной модели интегральной составляющей погрешности получены результаты, демонстрирующие эффективность метода концентрирующих преобразований.

Воспользуемся результатом, полученным выше для интегральной составляющей погрешности, и на ее основе найдем оценку уровня межсимвольных искажений для последовательности импульсов. Для этого просуммируем значения $\Delta\epsilon(t)$ в точках $t = \pm kT$. Полученная сумма дает оценку величины межсимвольных искажений для текущего k -импульса последовательности:

$$\Delta\epsilon(t + kT) = \sum_{n=-k}^k \frac{T I_{\max}}{4\pi^2} \frac{(\pi\eta_0 - \epsilon_0 x_k \Delta t)}{(I_{\max} + \epsilon_0)} \exp\left[-\frac{(I_{\max} + \epsilon_0) x_k \Delta t}{\pi\eta_0 - \epsilon_0 x_k \Delta t} (t + kT)\right].$$

Учитывая, что последовательность импульсов обладает свойством циклостационарности в широком смысле [1], запишем:

$$\Delta\epsilon(t + kT) = \frac{T I_{\max}}{4\pi^2} \frac{(\pi\eta_0 - \epsilon_0 \bar{x}_k \Delta t)}{(I_{\max} + \epsilon_0)} \times \sum_{n=-k}^k \exp\left[-\frac{(I_{\max} + \epsilon_0) \bar{x}_k \Delta t}{\pi\eta_0 - \epsilon_0 \bar{x}_k \Delta t} (t + kT)\right]. \quad (37)$$

Соотношение в виде выражения (37) позволяет оценить величину погрешности для текущего импульса, обусловленную межсимвольной интерференцией, при использовании метода обработки на основе концентрирующих интегральных преобразований. Это, в свою очередь, позволяет не только сравнить результаты обработки сигнала, полученные стандартными методами и описанным в данной статье, но и оценить эффективность предлагаемого метода.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Френкс Л. Е. Теория сигналов. М.: Сов. радио, 1974.
2. Сердюков Ю. П. Метод концентрирующих интегральных преобразований. Ч. 1. Потенциальные возможности метода концентрирующих интегральных преобразований // Проблемы машиноведения и машиностроения. Вып. 27. — СПб.: СЗТУ, 2002. — С. 56—66.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. — М.: Наука, 1969.